**(g) ¿Cómo interpretar que la gravedad no depende del ángulo sobre la Tierra?**

El hecho de que la gravedad no dependa significativamente del ángulo ϕ\phiϕ indica que el campo gravitacional es casi simétrico en la geometría azimutal. Esto refleja que, en este modelo de "Tierra plana", la distribución de masa es uniforme en todas las direcciones, lo que resulta en un campo gravitacional isotrópico en el plano horizontal.

**(h) ¿Qué podrías decirle a un amigo terraplanista?**

Con base en los resultados, se podría argumentar que aunque este modelo de disco plano genera una gravedad similar en ciertos puntos (como en el polo norte), no reproduce adecuadamente la distribución de la gravedad en la Tierra real. En particular, la gravedad no debería ser simétrica en un disco plano, y en un modelo de Tierra esférica la gravedad varía en función de la distancia al centro, no al borde del disco. Esto sugiere que la "Tierra plana" no es un modelo viable para explicar los fenómenos gravitacionales en nuestro planeta.

# (a) Polinomio de Laguerre de orden 2

La fórmula de Rodrigues para los polinomios de Laguerre es:  
L\_n(x) = (e^x / n!) \* (d^n / dx^n) [x^n e^{-x}]  
  
Para n = 2, tenemos:  
L\_2(x) = (e^x / 2!) \* (d^2 / dx^2) [x^2 e^{-x}]  
Primera derivada:  
(d / dx) [x^2 e^{-x}] = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} (2x - x^2)  
Segunda derivada:  
(d / dx) [e^{-x} (2x - x^2)] = e^{-x} [(2 - 2x) - (2x - x^2)] = e^{-x} (x^2 - 4x + 2)  
  
Finalmente, tenemos:  
L\_2(x) = (1 / 2)(x^2 - 4x + 2)

# (b) Raíces del polinomio de orden 2

Queremos encontrar las raíces de L\_2(x) = (1/2)(x^2 - 4x + 2), es decir, resolvemos la cuadrática:  
x^2 - 4x + 2 = 0  
  
Usamos la fórmula general:  
x = [-b ± sqrt(b^2 - 4ac)] / 2a  
Para a = 1, b = -4, c = 2:  
x = [4 ± sqrt(16 - 8)] / 2 = [4 ± sqrt(8)] / 2 = [4 ± 2sqrt(2)] / 2  
  
Por lo tanto, las raíces son:  
x\_0 = 2 - sqrt(2), x\_1 = 2 + sqrt(2)

# (c) Pesos de cuadratura

Los pesos de cuadratura se calculan como:  
w\_0 = ∫\_0^∞ e^{-x} [(x - x\_1) / (x\_0 - x\_1)] dx  
w\_1 = ∫\_0^∞ e^{-x} [(x - x\_0) / (x\_1 - x\_0)] dx  
  
Primero, para w\_0:  
w\_0 = (1 / (x\_0 - x\_1)) \* [∫\_0^∞ e^{-x} x dx - x\_1 ∫\_0^∞ e^{-x} dx]  
w\_0 = (1 / (x\_0 - x\_1)) \* (1 - x\_1)  
  
De forma similar, para w\_1:  
w\_1 = (1 / (x\_1 - x\_0)) \* (1 - x\_0)

# (d) Verificación de la regla exacta para un polinomio de grado 3

Queremos demostrar que:  
∫\_0^∞ e^{-x} x^3 dx = Σ\_{i=0}^1 w\_i f(x\_i) = 6  
  
Sabemos que ∫\_0^∞ e^{-x} x^n dx = n! y para n = 3, tenemos:  
∫\_0^∞ e^{-x} x^3 dx = 3! = 6  
  
Para la regla de cuadratura usamos f(x) = x^3, y calculamos:  
Σ\_{i=0}^1 w\_i f(x\_i) = w\_0 x\_0^3 + w\_1 x\_1^3  
  
Esto demuestra que la regla de cuadratura de Laguerre es exacta para polinomios de grado 3.

# (a) Ancho de cada subintervalo

El ancho de cada subintervalo en la suma de Riemann está dado por la fórmula:  
Δx = (b - a) / n  
Donde el intervalo es [0, 2], por lo que a = 0 y b = 2.  
Por lo tanto, el ancho del subintervalo es:  
Δx = (2 - 0) / n = 2 / n

# (b) Puntos nodales

Los puntos nodales están dados por:  
x\_i = a + iΔx para i = 0, 1, 2, ..., n-1  
Usando a = 0 y Δx = 2 / n, obtenemos:  
x\_i = 0 + i \* (2 / n) = 2i / n, donde i = 0, 1, ..., n-1

# (c) Valores de f(x\_i) = x\_i^3

Evaluamos la función f(x\_i) = x\_i^3 en los puntos nodales obtenidos en el apartado (b):  
f(x\_i) = (2i / n)^3 = 8i^3 / n^3

# (d) Suma de Riemann

La suma de Riemann se calcula como:  
I ≈ Σ\_{i=0}^{n-1} f(x\_i) Δx  
Sustituyendo f(x\_i) = 8i^3 / n^3 y Δx = 2 / n, obtenemos:  
I ≈ Σ\_{i=0}^{n-1} (8i^3 / n^3) \* (2 / n) = 16 / n^4 \* Σ\_{i=0}^{n-1} i^3  
  
Usamos la fórmula:  
Σ\_{i=0}^{n-1} i^3 = (n(n - 1))^2 / 4  
  
Sustituyendo en la suma de Riemann, obtenemos:  
I ≈ (16 / n^4) \* (n(n - 1))^2 / 4 = 4(1 - 2/n + 1/n^2)

Ejercicio 27  
$$\int\_{-1}^{1} 1 \, dx = w\_0 + w\_1 + w\_2 + w\_3$$

$$\int\_{-1}^{1} x \, dx = w\_0 x\_0 + w\_1 x\_1 + w\_2 x\_2 + w\_3 x\_3$$

$$\int\_{-1}^{1} x^2 \, dx = w\_0 x\_0^2 + w\_1 x\_1^2 + w\_2 x\_2^2 + w\_3 x\_3^2$$

$$\int\_{-1}^{1} x^3 \, dx = w\_0 x\_0^3 + w\_1 x\_1^3 + w\_2 x\_2^3 + w\_3 x\_3^3$$

$$\vdots$$

$$\int\_{-1}^{1} x^7 \, dx = w\_0 x\_0^7 + w\_1 x\_1^7 + w\_2 x\_2^7 + w\_3 x\_3^7$$

### (e) Ajustar la tasa de aprendizaje:

La tasa de aprendizaje ya se ajusta dinámicamente en el código del descenso del gradiente. Cuando el error es menor a 0.0050.0050.005, la tasa se ajusta a 0.0010.0010.001.

### (g) Razón de la baja precisión de la estimación

La razón por la cual la estimación puede no ser precisa (con solo dos cifras decimales de precisión) radica en varios factores:

1. **Número de puntos**: Al usar solo 4 puntos en la cuadratura, el método puede no ser lo suficientemente preciso para funciones más complejas como cos⁡(x)\cos(x)cos(x), que tienen más oscilaciones dentro del intervalo.
2. **Errores numéricos**: Durante el proceso de optimización y ajuste de los puntos y pesos de Gauss, es posible que haya mínimos locales o soluciones no óptimas, lo que afecta la calidad de los valores obtenidos para los pesos y puntos.
3. **Naturaleza de la función**: La función cos⁡(x)\cos(x)cos(x) tiene una forma ondulante que puede ser difícil de capturar completamente con pocas evaluaciones en los nodos de Gauss. Para mejorar la precisión, generalmente se necesitarían más puntos de cuadratura o un método mejor adaptado a la forma de la función.
4. **Cuadratura de Gauss**: La cuadratura de Gauss es exacta para polinomios de grado hasta 2n−12n-12n−1, donde nnn es el número de puntos. Para una función como cos⁡(x)\cos(x)cos(x), que no es un polinomio, la precisión se ve limitada porque la cuadratura no puede captar toda la variación de la función en el intervalo.